

# Modelado de Circuitos RLC: del Método Matemático a la Aproximación Impulsada por Datos



## Colaboración

Ramón Daniel Rodríguez Soto; Emilio Barocio Espejo; Universidad de Guadalajara; Oswaldo Cortes Robles; Universidad Tecnológica de Jalisco, Dunstano del Puerto Flores; Pavel Zuñiga Haro, Universidad de Guadalajara

Fecha de recepción: 30 de septiembre 2024

Fecha de aceptación: 04 de marzo de 2025

**RESUMEN:** Este artículo explora el modelado de circuitos RLC utilizando métodos matemáticos, numéricos y basados en datos, con un enfoque especial en la Descomposición en Modos Dinámicos (DMD). Se realiza una comparación de la precisión y eficiencia de cada enfoque, destacando cómo el DMD ofrece ventajas significativas frente a los métodos tradicionales, particularmente en la captura de comportamientos dinámicos y en la simplificación del análisis del sistema. Esta técnica basada en datos no solo mejora la precisión del modelado, sino que también proporciona una herramienta poderosa para el estudio de circuitos eléctricos, lo que podría transformar las prácticas de diseño y análisis en ingeniería eléctrica.

**PALABRAS CLAVE:** Circuitos RLC, Descomposición en Modos Dinámicos (DMD), Métodos Basados en Datos, Modelado de Circuitos, Ingeniería Eléctrica.

**ABSTRACT:** This article explores the modeling of RLC circuits using mathematical, numerical, and data-driven methods, with a special focus on Dynamic Mode Decomposition (DMD). A comparison of the accuracy and efficiency of each approach is presented, highlighting how DMD offers significant advantages over traditional methods, particularly in capturing dynamic behaviors and simplifying system analysis. This data-driven technique not only enhances modeling accuracy but also provides a powerful tool for studying electrical circuits, potentially transforming design and analysis practices in electrical engineering.

**KEYWORDS:** RLC Circuits, Dynamic Mode Decomposition (DMD), Data-Driven Methods, Circuit Modeling, Electrical Engineering

## INTRODUCCIÓN

En el ámbito de la tecnología y la industria de sistemas de potencia, los circuitos RLC (Resistencia, Inductancia, Capacitancia) son fundamentales. Estos circuitos constituyen la base de numerosos dispositivos y sistemas que se utilizan a diario, desde transformadores y generadores hasta sistemas de transmisión y distribución de energía eléctrica [1]. El modelado matemático de estos circuitos es esencial para comprender su comportamiento y optimizar su rendimiento. A través de ecuaciones diferenciales y métodos para resolverlas, es posible describir el comportamiento de un circuito

RLC y su respuesta ante diferentes estímulos, permitiendo así el diseño de sistemas de potencia más eficientes y confiables [2].

Tradicionalmente, la resolución de las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de un circuito RLC se ha abordado mediante métodos directos, numéricos con un enfoque temporal y la transformada de Laplace [3] basado en la frecuencia. Si bien estos enfoques son robustos, los modelos matemáticos tradicionales suelen ser ideales y no siempre capturan todas las dinámicas de los sistemas reales, especialmente cuando se trata de fenómenos no lineales o pérdidas imprevistas. Aquí es donde cobran relevancia las técnicas basadas en datos, las cuales utilizan cualquier tipo de información cuantitativa o cualitativa que puede ser recopilada, almacenada y analizada, como números, texto, imágenes y registros históricos; en nuestro caso, mediciones. Estas técnicas han emergido como una poderosa herramienta para el modelado, análisis y simulación de sistemas dinámicos, como los circuitos RLC [4,5].

El análisis de circuitos RLC es fundamental en diversas aplicaciones de ingeniería, pero su modelado tradicional enfrenta limitaciones significativas. Los métodos analíticos, como la Transformada de Laplace, requieren suposiciones idealizadas que pueden no representar con precisión sistemas reales sujetos a perturbaciones y ruido. Por otro lado, los métodos numéricos, como Runge-Kutta, ofrecen mayor precisión, pero a un alto costo computacional. En este contexto, surge la necesidad de explorar enfoques basados en datos, que permiten modelar dinámicas directamente a partir de mediciones, sin depender de ecuaciones matemáticas explícitas.

Las técnicas impulsadas en datos se han consolidado por su capacidad estimar la dinámica de sistemas sin necesidad de un modelo físico explícito. Esto es particularmente ventajoso cuando los modelos tradicionales son inadecuados o difíciles de formular. Por ejemplo, la optimización de la red eléctrica mediante modelos tradicionales puede resultar extremadamente compleja debido a la interconexión de múltiples elementos y la variabilidad en la demanda y generación de energía. Sin embargo, las técnicas basadas en datos permiten optimizar la distribución de energía en tiempo real, al considerar factores como la generación renovable, la demanda actual y las condiciones de la red. El uso de estos métodos representa un cambio paradigmático en el modelado de sistemas, ya que ofrece modelos precisos sin recurrir al modelo en variables de estado, superando las limitaciones de los métodos analíticos y numéricos convencionales. Entre estas técnicas destaca Descomposición en Modos Dinámicos (DMD) [6], como una técnica eficaz para extraer pa-

trones dinámicos de datos temporales, permitiendo descomponer sistemas en modos coherentes y describir su evolución, esta flexibilidad es crucial en el análisis de circuitos RLC.

En este estudio, se analiza un mismo circuito RLC en serie como caso de estudio y se comparan diversas metodologías analíticas, numéricas y basadas en datos para resolver su modelo matemático. Se evalúa la precisión de cada enfoque bajo las mismas condiciones y parámetros, garantizando una comparación equitativa. Además, se implementa y contrasta la técnica basada en datos de DMD, demostrando cómo esta metodología puede mejorar la fidelidad del modelado, especialmente en escenarios donde los métodos tradicionales presentan limitaciones o se vuelven imprácticos.

## MATERIAL Y MÉTODOS

El modelo de espacio de estados de un circuito RLC es una representación matemática que describe la dinámica del sistema. La Figura 1 muestra un diagrama del circuito RLC en serie.

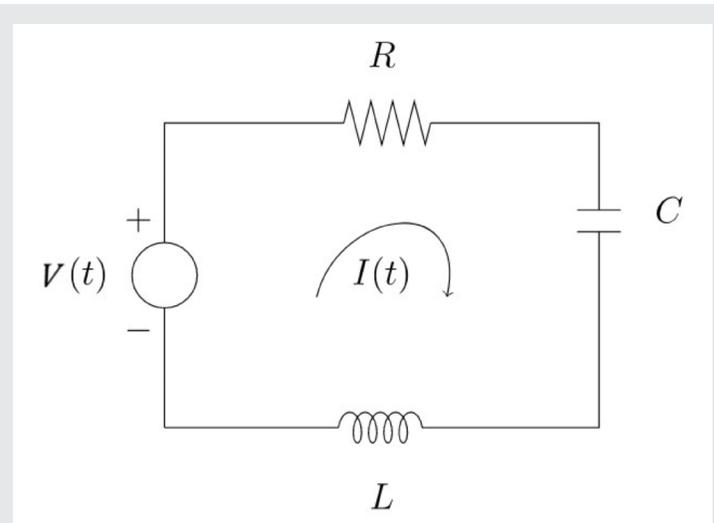


Figura 1. Diagrama de circuito RLC en serie.

Fuente: Elaboración propia.

Se puede imaginar un circuito RLC, que es una pequeña ciudad eléctrica donde la corriente eléctrica (flujo de carga eléctrica) es el tráfico. El voltaje de entrada es como la autopista principal que permite la entrada de vehículos (corriente) a la ciudad, pero en un solo sentido y con flujo vehicular constante. Primero el flujo de vehículos se regula por una caseta de acceso (la resistencia) que genera una fila de longitud constante, pero sin detener el flujo del todo. Luego, la corriente llega al capacitor que funciona como un estacionamiento donde la carga parcialmente se almacena eventualmente hasta llegar a su límite de capacidad y permita el flujo totalmente. Parte de este flujo sale del capacitor al inductor que a medida que avanzan, el inductor actúa como

una rotonda que regula el flujo, almacenando y liberando energía gradualmente.

A continuación, se explicarán las reglas de tráfico en la ciudad eléctrica. Estas reglas son las ecuaciones diferenciales que describen cómo se mueve la "electricidad" a través de la ciudad. En el circuito RLC, la velocidad de cambio de la corriente  $i$  (la derivada de la corriente) está relacionada con la caída de voltaje en el inductor  $v_L$ . De manera similar, la velocidad de cambio del voltaje del capacitor  $v_C$  (la derivada del voltaje del capacitor) está relacionada con la corriente a través del capacitor  $i$ .

Por lo tanto, se pueden escribir dos ecuaciones diferenciales de primer orden que describen estas reglas de tráfico. Y, al aplicar la ley de Kirchhoff para los voltajes, es posible obtener una descripción completa de cómo funciona nuestra ciudad eléctrica. Así es como analizamos el modelo de espacio de estados de un circuito RLC.

Para explorar la respuesta natural de un circuito RLC, es necesario recurrir a las ecuaciones diferenciales, por lo tanto, se modelará y analizará el circuito RLC con una ecuación diferencial [7]. Esta ecuación permitirá observar cómo cambia la corriente en el circuito con el tiempo, en función de la resistencia, la inductancia y la capacitancia, se encuentra dada por

$$L \frac{d i(t)}{dt} + R i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v_s(t) \quad \text{Ec.(1)}$$

Donde  $L$  es la inductancia (en Henrios (H)),  $R$  es la resistencia (en Ohmios ( $\Omega$ )),  $C$  es la capacitancia (en Faradios (F)),  $i$  es la corriente (en Amperios (A)),  $v_s(t)$  es la fuente de voltaje en función del tiempo (en Voltios (V)) y  $t$  es el tiempo (en segundos (s)). Aplicando una segunda derivada a la corriente ( $i(t)$ ), se simplifica la ecuación y es expresada en términos de la aceleración de la corriente. La ecuación diferencial de segundo orden con respecto al tiempo es:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt} + R \frac{d i(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{d v_s(t)}{dt} \quad \text{Ec.(2)}$$

El primer término,  $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ , describe cómo  $L$  afecta la aceleración de la corriente (la rapidez con la que cambia la velocidad de la corriente).

El segundo término,  $R \frac{d i(t)}{dt}$ , muestra cómo  $R$  afecta la velocidad de la corriente (cuánto cambia la corriente en un cierto tiempo).

El tercer término,  $\frac{1}{C} i(t)$ , describe cómo  $C$  afecta la cantidad de corriente en el circuito, mientras la integral de la ecuación original representa la acumulación de carga en el condensador.

Se tiene ahora una ecuación diferencial ordinaria de segundo grado. A continuación, se resolverá por diferentes métodos la ecuación diferencial y se comparará con una estimación basada en datos.

### Método de Resolución Directa

Abordando la solución de la ecuación diferencial de un circuito RLC en serie utilizando el Método de Resolución Directa. Se inicia con la ecuación diferencial que describe el circuito dada por la Ecuación (2), la solución homogénea satisface la ecuación

$$\frac{d^2 i(t)}{dt} + R \frac{d i(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0 \quad \text{Ec.(3)}$$

Donde  $v_s(t) = 0$ , por lo que en un circuito RLC en serie, se describe un circuito en descarga, sin una fuente de tensión externa aplicada. Esta ecuación se denomina homogénea debido a que cada término está vinculado con la variable  $i(t)$  y sus derivadas. Se supone que una solución homogénea tiene la forma  $Ae^{\zeta t}$ , ya que las soluciones de ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes suelen ser exponenciales. La razón es que las funciones exponenciales tienen la propiedad de que sus derivadas son proporcionales a la función original, lo que simplifica el proceso de resolución [7]. Aquí,  $A$  es una constante que representa la amplitud de la corriente, mientras que  $\zeta$  es la llamada frecuencia natural. Sustituyendo  $Ae^{\zeta t}$  en la Ecuación (3), obtenemos la ecuación característica:

$$L\zeta^2 + R\zeta + \frac{1}{C} = 0 \quad \text{Ec.(4)}$$

Al resolver esta ecuación se obtendrán las raíces  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  del polinomio característico siguiente:

$$\zeta_1, \zeta_2 = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad \text{Ec.(5)}$$

Esta expresión que permite definir el factor de amortiguamiento  $\alpha$  y la frecuencia de resonancia  $\omega_0$  dada por

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{Ec.(6)}$$

Finalmente, la solución homogénea será una combinación de términos exponenciales basados en las raíces del polinomio característico:

$$i(t) = A_1 e^{\zeta_1 t} + A_2 e^{\zeta_2 t} \quad \text{Ec.(7)}$$

Donde  $A_1$  y  $A_2$  son constantes de amplitud de la corriente que se determinan utilizando las condiciones iniciales,  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  son frecuencias naturales.

Este proceso proporciona una solución para la corriente en función del tiempo en un circuito RLC serie.

## Método de transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una poderosa herramienta matemática que permite analizar sistemas dinámicos en el dominio de la frecuencia. Con ella, se pueden convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas más manejables. Para una función  $f(t)$ , la transformada de Laplace  $\mathcal{L}[f(t)]$  se define como [3]:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad \text{Ec.(8)}$$

Aquí,  $s$  es una variable compleja y  $F(s)$  es la función transformada de  $f(t)$ .

Es posible utilizar el método de Laplace para analizar circuitos eléctricos y resolver las ecuaciones diferenciales. Se considera la Ecuación (1) de un circuito RLC en serie que representa  $f(t)$ , se aplica la transformada de Laplace a ambos lados de la Ecuación (1) [3], esto conduce a la siguiente expresión en el dominio de Laplace:

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s} = \frac{V(s)}{s} \quad \text{Ec.(9)}$$

donde  $I(s)$  y  $V(s)$  son las transformadas de Laplace de  $i(t)$  y  $v_s(t)$  respectivamente, simplificando el análisis, se asumen condiciones iniciales  $i(0)=0$  y

Entonces despejando la Corriente  $I(s)$  de la expresión anterior:

$$I(s) = \frac{V(s)}{Ls^2 + Rs + 1/C} \quad \text{Ec.(10)}$$

Finalmente se aplica la transformada inversa de Laplace para obtener la corriente nuevamente en el dominio del tiempo:

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{V(s)}{Ls^2 + Rs + 1/C} \right\} \quad \text{Ec.(11)}$$

Donde  $\alpha = R/2L$  y  $\omega = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}$

Este método proporciona una expresión para la corriente en función del tiempo en un circuito RLC en serie [3, 7]. La transformada de Laplace simplifica la resolución de ecuaciones diferenciales aplicando exclusivamente expresiones algébricas y permite analizar el comportamiento del circuito en el dominio de la frecuencia de una manera más eficiente.

## Modelo numérico por Runge-Kutta

El método Runge-Kutta es un método numérico que sirve para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, ecuaciones que relacionan una función con sus derivadas. El método Runge-Kutta consiste en seguir unos pasos que permiten ir avanzando poco a poco desde el valor inicial hasta el valor final que se quiere obtener. En cada paso, se utiliza la información que ya se tiene para estimar la información faltante. El método Runge-Kutta tiene

diferentes variantes según el número de pasos y el orden de precisión que se quiera obtener.

Se puede decir que el método Runge-Kutta es una forma de encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones que no es posible resolver fácilmente con otros métodos. Por ejemplo, para resolver la ecuación RLC usando el método Runge-Kutta de cuarto orden, se pueden seguir los siguientes pasos [8].

Primero se reescribe la Ecuación (1) como un sistema de dos ecuaciones de primer orden como se muestra a continuación

$$\frac{di}{dt} = \frac{v(t) - Ri - \frac{1}{C}q}{L} \quad \text{Ec.(12)}$$

donde  $q$  representa la carga, establecido por  $\frac{dq}{dt} = i$ .

Después se elige un intervalo de tiempo  $[t_0, t_f]$ , si es conocida la carga y la corriente en un momento, se puede estimar la carga y la corriente en el siguiente momento usando la ecuación y un valor pequeño llamado  $h$ , que es el intervalo de tiempo entre un momento y otro. Entonces se divide en  $N$  subintervalos de igual tamaño  $h=(t_f-t_0)/N$ , para después definir los puntos  $t_n=t_0+nh$ , con  $n=0,1,\dots,N$ .

Ahora se asignan unos valores iniciales  $q_0$  e  $i_0$  para la carga y la corriente en el tiempo inicial  $t_0$ . Para hacer esta estimación, el método Runge-Kutta usa cuatro valores intermedios, llamados  $k_1, k_2, k_3$ , y  $k_4$  para la corriente, y  $l_1, l_2, l_3$  y  $l_4$  para la carga. Estos valores se calculan usando la ecuación y los valores anteriores de la siguiente manera [8]:

$$k_1 = h \frac{V(t_n) - Ri_n - \frac{q_n}{C}}{L}, \quad l_1 = hi_n \quad \text{Ec.(13a)}$$

$$k_2 = h \frac{V(t_n + \frac{h}{2}) - R(i_n + \frac{k_1}{2}) - \frac{q_n + l_1}{C}}{L} \quad \text{Ec.(13b)}$$

$$l_2 = h \left( i_n + \frac{k_1}{2} \right)$$

$$k_3 = h \frac{V(t_n + \frac{h}{2}) - R(i_n + \frac{k_2}{2}) - \frac{q_n + l_2}{C}}{L} \quad \text{Ec.(13c)}$$

$$l_3 = h \left( i_n + \frac{k_2}{2} \right)$$

$$k_4 = h \frac{V(t_n + h) - R(i_n + k_3) - \frac{q_n + l_3}{C}}{L} \quad \text{Ec.(13d)}$$

$$l_4 = h(i_n + k_3)$$

Estos valores se usan para calcular la corriente y la carga en el siguiente momento con estas fórmulas:

$$i_{n+1} = i_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad \text{Ec.(14)}$$

$$q_{n+1} = q_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \quad \text{Ec.(15)}$$

Estas fórmulas son una forma de promediar los valores intermedios para obtener un valor más preciso. Así, se repite el proceso hasta llegar al momento final  $t_f$  que se quiere conocer. Este método permite obtener una solución numérica de la ecuación con un error pequeño, sin necesidad de conocer la solución exacta.

### Técnica Impulsada por Datos

En el análisis de sistemas dinámicos, varias técnicas basadas en datos han sido desarrolladas para modelar y comprender su comportamiento. Entre las más conocidas se encuentran la Estimación de Relación Autoregresiva (ERA), el Método del Lápiz de Matrices (Matrix Pencil), y el Método de Prony [9]. Aunque estas técnicas han sido útiles en diversas aplicaciones, la Descomposición en Modos Dinámicos (DMD) se destaca por su modernidad, flexibilidad y capacidad para trabajar directamente con datos sin necesidad de suposiciones sobre la estructura del modelo [6, 10]. A diferencia de ERA, Matrix Pencil y Prony, DMD ofrece una mayor robustez en capturar dinámicas complejas, encontrarse en diversos campos como la física en fluidos [6], la biología y medicina en encefalogramas [11], la economía en mercados de energía [12] y la ingeniería en monitoreo de sistemas de potencia [10], lo que la convierte en la técnica elegida en este trabajo para el modelado, análisis y simulación de circuitos RLC.

DMD es una técnica avanzada de análisis basada en datos que se utiliza para estimar el comportamiento de sistemas dinámicos [6]. Esta técnica es especialmente útil en la identificación de patrones temporales recurrentes en sistemas que cambian con el tiempo, como ondas que se propagan o circuitos RLC [5, 10]. La principal ventaja de DMD radica en su capacidad para descomponer datos temporales complejos en los llamados modos dinámicos característicos, permitiendo así una descripción compacta del sistema y una mejor comprensión de su evolución como se ilustra en la Figura 2.

El método DMD tiene la capacidad de aproximar el sistema dinámico a partir de los datos de medición del sistema  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , en esta matriz cada renglón  $m$  corresponde a un conjunto de mediciones o estados del sistema recopiladas durante  $n$  instantes de tiempo, donde cada columna está representada por las llamadas instantáneas  $\mathbf{X}_k \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ , con  $k=1, \dots, n$ .

Las mediciones se organizan en dos matrices, la matriz  $\mathbf{X}_1 \in \mathbf{R}^{m \times n-1}$ , y la matriz  $\mathbf{X}_2 \in \mathbf{R}^{m \times n-1}$ , la cual presenta

un desplazamiento temporal, lo que permite que el método DMD estime la matriz dinámica, es decir, se busca una relación entre estos dos conjuntos mediante un operador lineal  $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^{(m \times m)}$ , tal que:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{F}\mathbf{X}_1 \quad \text{Ec.(16)}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1^\dagger \quad \text{Ec.(17)}$$

donde  $\mathbf{X}_1^\dagger$  es la pseudo inversa de  $\mathbf{X}_1$ . DMD busca identificar una matriz de mapeo (operador)  $\mathbf{F}$  que describe la dinámica de transición entre dos conjuntos de datos,  $\mathbf{X}_1$  y  $\mathbf{X}_2$ , es decir, permite estimar o predecir el estado futuro del sistema a partir de su estado pasado.

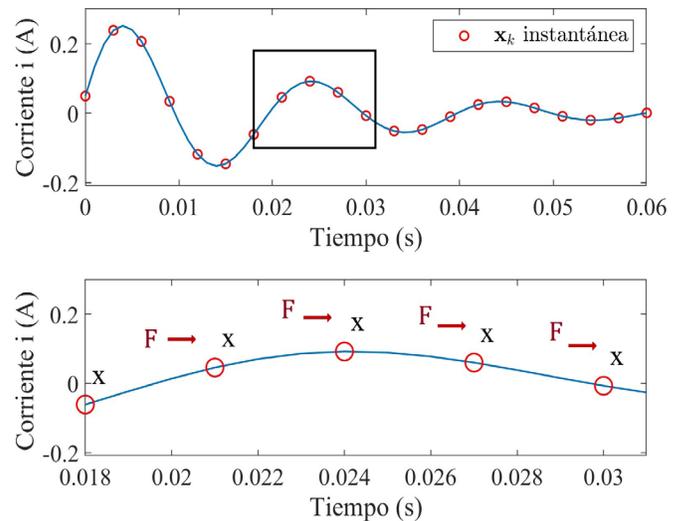


Figura 2. Serie de tiempo de corriente (imagen superior) muestras las instantáneas  $x_k$  que componen la serie de tiempo y (imagen inferior) la evolución del sistema la cual captura DMD. Fuente: Elaboración propia.

Para mejorar la estimación del operador  $\mathbf{F}$  y capturar la información más relevante del sistema, se emplea la técnica de Descomposición en Valores Singulares (DVS), que se define como:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad \text{Ec.(18)}$$

donde  $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{m \times m}$  y  $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  son los vectores singulares y  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  se conoce como los valores singulares. Esta descomposición separa los datos las diferentes matrices y componentes de diferente importancia, permitiendo seleccionar únicamente los componentes más significativos  $r$  y descartando aquellos con menor influencia en el comportamiento del sistema [6], obteniendo las matrices  $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{m \times r}$ ,  $\mathbf{V}^T \in \mathbf{R}^{r \times n}$  y  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbf{R}^{r \times r}$ .

Finalmente, el operador lineal  $\mathbf{F}$  se calcula sustituyendo la Ecuación (18) en Ecuación (17) y multiplicando  $\mathbf{U}^T$  obteniendo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \mathbf{U}^T \mathbf{F} \mathbf{U} \\
 \mathbf{F} &= \mathbf{U}^T \mathbf{X}_2 \mathbf{X}_1^\dagger \mathbf{U} \\
 \mathbf{F} &= \mathbf{U}^T \mathbf{X}_2 \mathbf{V} \Sigma^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \\
 \mathbf{F} &= \mathbf{U}^T \mathbf{X}_2 \mathbf{V} \Sigma^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{Ec.(19)}$$

A partir del operador  $\mathbf{F}$ , se obtienen sus vectores propios  $\mathbf{w}_j$  asociado a los valores propios  $\lambda_j$ , donde  $j = 1, 2, \dots, m$ , para determinar los modos DMD  $\phi_j$ , definidos como  $\phi_j = \mathbf{U} \mathbf{w}_j$ . Estos modos representan las dinámicas subyacentes del sistema con una frecuencia y una tasa de crecimiento o decaimiento fijas dadas por  $\lambda_j$ .

Posteriormente obtenemos los coeficientes  $\mathbf{b}$ , calculados como  $\mathbf{b} = \phi_j^{-1} \mathbf{x}^1$ , donde  $\mathbf{x}^1$  son los datos en el primer instante, permiten ponderar la contribución de cada modo en la combinación final. De este modo, el estado del sistema en cualquier instante de tiempo  $t$  se obtiene mediante la combinación de los modos, los valores propios y los coeficientes, siguiendo la ecuación:

$$x(t) = \sum_{j=1}^m b_j \phi_j e^{\omega_j t}
 \tag{Ec.(20)}$$

donde  $\omega_j = \log(\lambda_j / \Delta t)$ , siendo  $\Delta t$  el intervalo de tiempo entre mediciones consecutivas.

Este enfoque permite una descripción simplificada pero precisa del sistema, facilitando tanto la comprensión de su comportamiento como la predicción de su evolución futura. A diferencia de los métodos tradicionales, que requieren modelar cada sistema dinámico con ecuaciones específicas para describir su comportamiento, DMD puede aplicarse a una amplia variedad de sistemas sin necesidad de reformular ecuaciones individuales. Además, en comparación con las diferentes formulaciones matemáticas de estos métodos, DMD se reduce principalmente a multiplicaciones de matrices, lo que simplifica su implementación y cálculo.

El método DMD actúa como un dron que sobrevuela la ciudad y analiza el tráfico eléctrico del circuito, identifica patrones en la evolución de la corriente y el voltaje. A partir de estas observaciones, DMD extrae "rutas preferidas" o modos dinámicos que describen el comportamiento del sistema, permitiendo predecir cómo fluirá la electricidad en el futuro sin necesidad de conocer todas las reglas exactas del tráfico en la ciudad. Así como en el circuito RLC el voltaje y la corriente evolucionan en función de las características de los componentes, DMD analiza la evolución de los datos para encontrar patrones recurrentes que describan el sistema sin necesidad de ecuaciones explícitas.

## RESULTADOS

Se evaluaron diversas metodologías analíticas, numéricas y basadas en datos mediante simulaciones en MAT-

LAB / SIMULINK [13], aplicadas a un mismo caso de estudio: un circuito RLC. Para garantizar una comparación equitativa, todos los modelos se han analizado utilizando los mismos parámetros (Los dos primeros modelos, Ec. (11) para Laplace y Ec. (14) y Ec. (15) para Runge-Kutta):  $v_s = 1 \text{ V}$ ,  $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ ,  $t = 0 \text{ s}$ ,  $t_f = 0.1 \text{ s}$ ,  $R = 1 \text{ } \Omega$ ,  $L = 0.01 \text{ H}$ , y  $C = 0.001 \text{ F}$ . La matriz  $\mathbf{X}^{4 \times 121}$  obtenida de una ventana de tiempo de 0.06 s utilizada en DMD (Figura 2, imagen superior), fue generada a partir del modelo RLC de Simscape Electrical en SIMULINK, empleando un desplazamiento temporal de 0.001 s, asegurando así la coherencia en la evaluación de todas las metodologías.

En la Figura 3, se observan los resultados demuestran que las trayectorias de corriente obtenidas mediante las distintas metodologías –analítica, numérica y basada en datos– presentan una coincidencia notable, validando la precisión de todas ellas en la descripción de la dinámica del sistema. Esta correspondencia en la respuesta de la corriente del circuito RLC en serie, donde las soluciones obtenidas mediante los distintos métodos son prácticamente indistinguibles. Esto destaca la capacidad del DMD para capturar la evolución del sistema únicamente a partir de datos, sin requerir un modelo matemático explícito.

La solución analítica del circuito RLC, derivada de ecuaciones diferenciales, es precisa bajo condiciones ideales, pero se ve limitada ante perturbaciones o cambios no modelados. Por otro lado, el método numérico de Runge-Kutta ofrece robustez ante variaciones, aunque con un alto costo computacional. La Transformada de Laplace permite un análisis eficiente en el dominio de la frecuencia, pero su aplicación se complica en sistemas con entradas complejas. En contraste, el DMD trabaja directamente con los datos medidos, lo que le permite capturar las dinámicas del sistema sin requerir ecuaciones diferenciales explícitas, adaptándose mejor a condiciones reales.

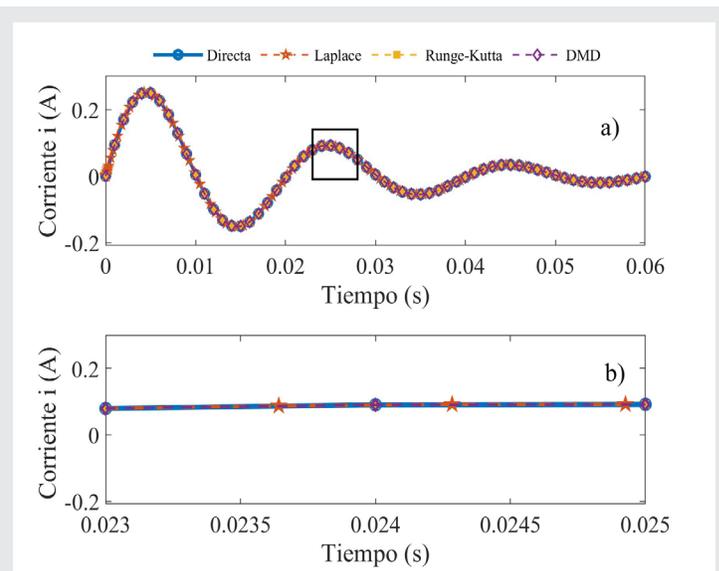


Figura 3: Estimación de las trayectorias de la corriente en a) y primer plano de las diferentes cuatro estimaciones en b). Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 4, se presentan los valores de frecuencia y amortiguamiento extraídos con cada método para la corriente, evidenciando una notable coincidencia entre ellos. Se observa que las discrepancias son mínimas, del orden de  $10^{-4}$ , como se detalla en la Tabla 1. La distribución de los puntos en el plano frecuencia-amortiguamiento muestra que los valores obtenidos con DMD prácticamente se superponen con los derivados de los métodos analíticos y numéricos, lo que indica que la técnica basada en datos es capaz de recuperar las características dinámicas del sistema con una precisión comparable únicamente a partir del operador  $F$  construido con datos.

Tabla 1. Datos comparativos de frecuencia y amortiguamiento para los cuatro métodos.

	Directa	Laplace	Runge-Kutta	DMD
Frecuencia (Hz)	50.0000	50.0000	49.99857	49.99698
Amortiguamiento	-50.0000	-50.0001	-50.0001	-50.0001

Fuente: Elaboración propia.

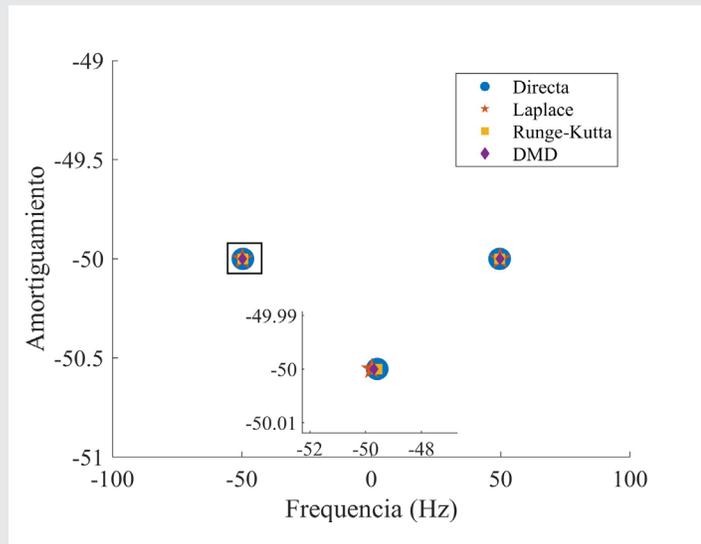


Figura 4. Amortiguamiento y frecuencia obtenidos de la serie de tiempo de la corriente.

Fuente: Elaboración propia.

Una de las principales ventajas del DMD es su capacidad para predecir la evolución del sistema a partir de datos históricos, sin requerir un conocimiento detallado de su estructura matemática. En la Figura 5, se ilustra cómo el operador  $F$  obtenido con DMD, a partir de una ventana de datos de solo 0.03s, es capaz de predecir la trayectoria de la corriente hasta  $t = 0.12s$  con un error medio absoluto de solo 0.00012%.

Esta capacidad predictiva es una ventaja significativa sobre los métodos analíticos y numéricos tradicionales, que dependen de un conocimiento detallado del sistema y pueden verse afectados por idealizaciones que no reflejan completamente las condiciones del mundo real. En contraste, el DMD permite modelar sistemas de manera flexible que se adapta mejor a las complejidades de los sistemas reales, capturando su comportamiento a partir de mediciones de voltaje o corriente sin necesidad de un modelo matemático explícito. Esto lo convierte en una herramienta poderosa para el análisis y la simulación de circuitos eléctricos y otros sistemas dinámicos complejos donde las perturbaciones, el ruido o las variaciones no modeladas pueden afectar el rendimiento del sistema.

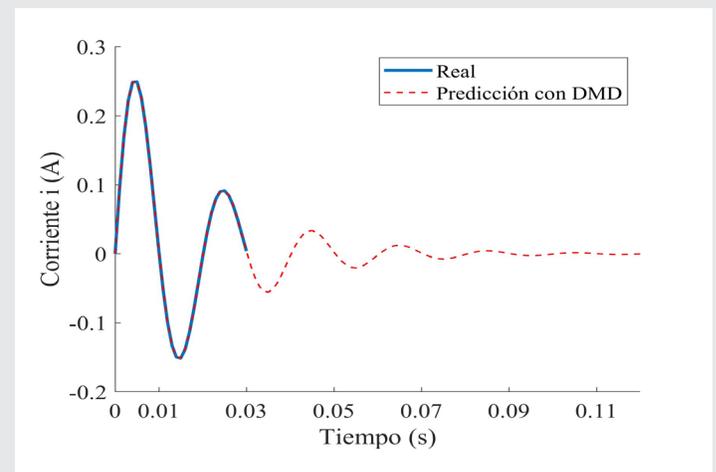


Figura 5. Pronóstico de la evolución dinámica de la corriente utilizando el operador  $F$ .

Fuente: Elaboración propia.

### CONCLUSIONES

Este estudio ha demostrado la efectividad de la Descomposición en Modos Dinámicos (DMD) como una alternativa robusta para el modelado y análisis de circuitos RLC. A diferencia de los métodos tradicionales –analíticos y numéricos– que requieren un modelo matemático explícito del sistema, DMD trabaja únicamente con datos y es capaz de reconstruir con alta precisión la dinámica del circuito.

Los resultados obtenidos muestran que DMD puede replicar la frecuencia y el amortiguamiento del sistema con una precisión comparable a la de métodos como la Transformada de Laplace y Runge-Kutta. Sin embargo, su principal ventaja radica en su capacidad para operar en escenarios donde los métodos convencionales pueden ser limitados, como en sistemas con componentes difíciles de modelar o sujetos a perturbaciones no previstas.

Además, la posibilidad de aplicar DMD sin necesidad de una formulación matemática específica lo

convierte en una herramienta versátil para el análisis de sistemas eléctricos complejos, incluyendo redes eléctricas donde la identificación y caracterización de dinámicas es esencial para la estabilidad y el control del sistema. Este trabajo resalta la importancia de los enfoques basados en datos para la modelación de sistemas dinámicos, abriendo nuevas oportunidades para la optimización y el monitoreo de circuitos eléctricos mediante técnicas avanzadas de procesamiento de datos.

#### BIBLIOGRAFÍA

[1] H. Amreiz, A. Janbey and M. Darwish, "Simulation of HVAC Transmission Line," 2019 54th International Universities Power Engineering Conference (UPEC), Bucharest, Romania, 2019, pp. 1-6.

[2] H. Amreiz, A. Janbey and M. Darwish, "Emulations of Overvoltage and Overcurrent Relays in Transmission Lines," 2022 57th International Universities Power Engineering Conference (UPEC), Istanbul, Turkey, 2022, pp. 1-6.

[3] S. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, ser. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012.

[4] H. Huang, Y. Lin, Y. Zhou, Y. Zhao, P. Zhang, and L. Fan, "Data-driven modeling of power system dynamics: Challenges, state of the art, and future work," *iEnergy*, vol. 2, no. 3, pp. 200-221, 2023.

[5] A. Alassaf and L. Fan, "Dynamic mode decomposition in various power system applications," in 2019 North American Power Symposium (NAPS), 2019, pp. 1-6.

[6] J. N. Kutz, S. L. Brunton, B. W. Brunton, and J. L. Proctor, *Dynamic Mode Decomposition*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2016. [Online]. Available: <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611974508>

[7] W. F. Trench, *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*. San Antonio, TX: Faculty Authored and Edited Books & CDs – Trinity University, 2013.

[8] J. Kafle, B. K. Thakur, and I. B. Bhandari, "Application of numerical methods for the analysis of damped parallel rlc circuit," *Journal of Institute of Science and Technology*, vol. 26, no. 1, p. 28-34, Jun. 2021.

[9] A. Almunif, L. Fan, and Z. Miao, "A tutorial on data-driven eigenvalue identification: Prony analysis, matrix pencil, and eigensystem reali-

zation algorithm," *International Transactions on Electrical Energy Systems*, vol. 30, no. 4, p. e12283, 2020.

[10] E. Barocio, B. C. Pal, N. F. Thornhill, and A. R. Messina, "A dynamic mode decomposition framework for global power system oscillation analysis," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 30, no. 6, pp. 2902-2912, 2015.

[11] O. K. Cura, A. Akan, *Analysis of epileptic EEG signals by using dynamic mode decomposition and spectrum*, *Biocybernetics and Biomedical Engineering*, Volume 41, Issue 1, p. 28-44, 2021.

[12] C. T. Elmore, A. W. Dowling, *Learning spatiotemporal dynamics in wholesale energy markets with dynamic mode decomposition*, *Energy*, Volume 232, p. 121-131, 2021,

[13] T. M. Inc., "Matlab version: 9.13.0 (r2022b)," Natick, Massachusetts, United States, 2022. [Online]. Available: <https://www.mathworks.com>

